

Penentuan Semua Akar Real Polinomial Secara Serentak Menggunakan Integrasi Metode Evolusi Diferensial-Cauchy-Niching Dan Newton Polishing

Ainol Yaqin^{1*}, Werry Febrianti²

¹Fakultas Sains, Program Studi Fisika, Institut Teknologi Dan Sains Nahdlatul Ulama Lampung, Bandar Lampung, Indonesia

²Fakultas Sains, Program Studi Matematika, Institut Teknologi Sumatera, Lampung Selatan, Indonesia

Email: ^{1*}ainol@itsnulampung.ac.id, ²werry.febrianti@ma.itera.ac.id

(* : coresponding author)

Abstrak - Penentuan seluruh akar real polinomial derajat tinggi merupakan tantangan dalam analisis numerik, terutama ketika akar-akar berdekatan. Metode konvensional seperti Newton-Raphson memerlukan tebakan awal yang tepat dan cenderung gagal pada kasus akar berdekatan atau hanya menemukan satu akar dominan. Penelitian ini mengusulkan integrasi tiga metode yang saling melengkapi untuk menentukan secara serentak semua akar real polinomial: (a) Batas Cauchy (*Cauchy Bound*) untuk menentukan ruang pencarian secara otomatis, (b) Evolusi Diferensial atau *Differential Evolution* (DE) dengan mekanisme *Niching* untuk eksplorasi global dan lokalisasi seluruh akar secara simultan, serta (c) *Newton Polishing* untuk meningkatkan akurasi hasil. Parameter DE yang digunakan adalah laju mutasi $F = 0,5$ dan peluang *crossover* $Cr = 0,9$. Metode ini diuji pada tiga polinomial derajat 5 yang mempunyai akar-akar riil dengan karakteristik berbeda: koefisien besar (P1), koefisien desimal (P2), serta akar berdekatan dengan jarak 0,1 (P3). Hasil simulasi menunjukkan bahwa metode yang diusulkan mampu menemukan semua akar real pada ketiga polinomial uji dalam satu kali eksekusi (serentak) tanpa memerlukan tebakan awal berulang dengan rata-rata waktu komputasi kurang dari 5 detik tiap polinomial. Pendekatan terintegrasi ini terbukti lebih efektif dibandingkan metode Newton-Raphson konvensional yang memerlukan tebakan awal dan rentan gagal pada kasus akar yang berdekatan.

Kata Kunci: Akar Polinomial, *Differential Evolution*, *Cauchy Bound*, *Niching*, *Newton Polishing*

Abstract – Determining all real roots of high-degree polynomials remains a challenge in numerical analysis, particularly when roots are adjacent or clustered. Conventional methods, such as Newton-Raphson, require precise initial guesses and tend to fail when roots are adjacent, often converging to only one dominant root. This study proposes an integration of three complementary methods for the simultaneous determination of all real roots of polynomials: (a) *Cauchy Bound* to automatically determine the search space, (b) *Differential Evolution* (DE) with a *Niching* mechanism for global exploration and simultaneous localization of all roots, and (c) *Newton Polishing* to enhance root accuracy. The *Differential Evolution* parameters employed are mutation factor $F = 0.5$ and crossover probability $Cr = 0.9$. The method was tested on three fifth-degree polynomials with distinct characteristics: large coefficients (P1), decimal coefficients (P2), and adjacent roots separated by 0.1 (P3). Simulation results demonstrate that the proposed method successfully identified all real roots of the three test polynomials in a single execution, without requiring multiple initial guesses. The average computation time was less than 5 seconds per polynomial. This integrated approach proves more effective than the conventional Newton-Raphson method, which requires initial guesses and remains prone to failure when roots are adjacent.

Keywords: Polynomial Root, *Differential Evolution*, *Cauchy Bound*, *Niching*, *Newton Polishing*.

1. PENDAHULUAN

Penentuan akar-akar polinomial merupakan salah satu persoalan fundamental dalam bidang analisis numerik yang memiliki aplikasi luas dalam berbagai disiplin ilmu; seperti teknik, fisika, dan pemrosesan sinyal (McNamee & Pan, 2013). Secara teoretis, polinomial derajat n memiliki tepat n akar sesuai dengan Teorema Dasar Aljabar. Namun, pencarian seluruh akar tersebut secara simultan dengan tingkat akurasi yang tinggi tetap menjadi tantangan, terutama pada polinomial derajat tinggi atau polinomial yang memiliki akar-akar yang saling berdekatan (*closely spaced roots*). Metode iteratif klasik seperti Newton-Raphson atau metode Secant sangat bergantung pada pemilihan nilai awal. Jika nilai awal tidak tepat, metode ini seringkali gagal (tidak konvergen) atau hanya menemukan satu akar yang sama secara berulang (Aziz, Salsabillah, & Mahmudah, 2026).

Di sisi lain, algoritma metaheuristik seperti Evolusi Diferensial atau *Differential Evolution* (DE) telah menunjukkan performa yang sangat baik dalam pencarian global tanpa memerlukan informasi gradien yang rumit (Febrianti, Sidarto, & Sumarti, 2021). Meskipun demikian, DE standar memiliki keterbatasan dalam hal konvergensi prematur, di mana seluruh populasi cenderung berkumpul pada satu titik optimal (akar dominan) dan mengabaikan akar-akar lainnya. Selain masalah konvergensi, efektivitas algoritma pencarian dipengaruhi oleh penentuan batas ruang pencarian (*search space*). Pengaturan batas yang terlalu luas akan memperlambat proses komputasi, sementara batas yang terlalu sempit berisiko menghilangkan lokasi akar yang sebenarnya. Seringkali, peneliti menentukan batas ini melalui proses *trial-error* yang tidak efisien.

Untuk mengatasi permasalahan tersebut, penelitian ini mengusulkan sebuah pendekatan terintegrasi. Pertama, Teorema *Cauchy Bound* digunakan untuk menentukan batas atas dan batas bawah ruang pencarian secara otomatis berdasarkan koefisien polinomial. Kedua, teknik *Niching* diintegrasikan ke dalam mekanisme DE untuk menjaga keberagaman populasi melalui gaya repulsi, sehingga individu-individu dalam populasi didorong untuk mengeksplorasi dan menempati lokasi akar yang berbeda secara bersamaan. Terakhir, untuk mencapai akurasi tingkat tinggi yang dibutuhkan dalam analisis saintifik, langkah *Newton Polishing* ditambahkan sebagai mekanisme penyempurnaan lokal (*local refinement*) terhadap kandidat akar yang ditemukan oleh DE.

2. METODE

2.1 Akar Polinomial Dan Batas Cauchy

Secara umum, persamaan polinomial derajat n dapat dinyatakan dalam bentuk matematis berikut:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (1)$$

dengan $a_n \neq 0$ dan a_i merupakan koefisien riil atau kompleks (Burden, Faires, & Burden, 2015). Berdasarkan Teorema Dasar Aljabar, persamaan tersebut memiliki tepat n akar. Salah satu tantangan utama dalam implementasi algoritma pencarian global adalah penentuan domain pencarian, batas ruang pencarian bawah (lb) dan batas atas (ub), yang menjamin seluruh akar berada di dalam rentang tersebut tanpa membuat ruang pencarian terlalu luas.

Untuk mengatasi kendala ini, penelitian ini menerapkan Teorema Batas Cauchy (*Cauchy Bound*) (Prodanov, 2022). Teorema ini menyatakan bahwa seluruh akar dari polinomial $P(x)$ berada dalam batas riil yang didefinisikan oleh batas atas absolut tunggal. Batas Cauchy (B_c) dihitung menggunakan formulasi:

$$B_c = 1 + \frac{\max_{0 \leq i \leq n-1} |a_i|}{|a_n|} \quad (2)$$

Berdasarkan nilai ini, lb dan ub dapat ditentukan secara mutlak melalui persamaan:

$$lb = -B_c, \quad ub = B_c \quad (3)$$

Jenis penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah penelitian kajian pustaka (*library research*). Data yang digunakan dalam penelitian ini bersumber dari jurnal Nurman dkk (2024), dengan persamaan polinomial yang diujikan dalam penelitian ini merupakan polinomial berderajat 5 dengan karakteristik berbeda yang diberikan pada Tabel 1 (Nurman, Mariani, & Nurhidayat, 2024).

Tabel 1. Polinomial Uji

Kode	Polinomial	Karakteristik
P1	$f(x) = x^5 - 156x^4 - 5x^3 + 780x^2 + 4x - 624$	Koefisien besar, akar tersebar
P2	$f(x) = -x^5 + 2,2x^4 + 18,49x^3 - 29,89x^2 - 76,5x + 100,8$	Koefisien desimal, akar tidak bulat
P3	$f(x) = x^5 - 3,3x^4 - 3,68x^3 + 17,82x^2 - 1,28x - 18,48$	Koefisien desimal dan kecil, akar berdekatan

2.2. Algoritma Evolusi Diderensial dan Teknik *Niching*

Evolusi Diferensial atau *Differential Evolution* (DE) merupakan algoritma metaheuristik berbasis populasi yang dikemukakan oleh Storn dan Price untuk menyelesaikan masalah optimasi (Febrianti, Sidarto, & Sumarti, 2021). Algoritma DE diawali dengan Inisialisasi, yaitu pembangkitan populasi secara acak pada rentang yang ditentukan $[lb, ub]$, seperti pada algoritma metaheuristik lainnya. Selanjutnya adalah proses evolusi dengan tahapan sebagai berikut (Febrianti, Sidarto, & Sumarti, 2022).

- **Mutasi**; sebuah vektor mutan $\mathbf{v}_i^{G+1}$ untuk generasi $G+1$ ditentukan dengan memanfaatkan perbedaan vektor target $\mathbf{x}_i^G$ antar individu pada generasi G . Pada penelitian ini, strategi mutasi yang digunakan adalah DE/rand/1 yang diberikan dalam persamaan berikut:

$$\mathbf{v}_i^{G+1} = \mathbf{x}_{r_1}^G + F \cdot (\mathbf{x}_{r_2}^G - \mathbf{x}_{r_3}^G) \quad (4)$$

dengan r_1, r_2, r_3 adalah indeks acak yang saling berbeda, serta $F \in [0, 2]$ adalah faktor skala (*scaling factor*) yang disebut juga sebagai laju mutasi.

- **Crossover**; sebuah vektor trial $\mathbf{u}_i^{G+1}$ dibentuk dengan mengombinasikan komponen dari vektor target $\mathbf{x}_i^G$ dan vektor mutan $\mathbf{v}_i^{G+1}$ berdasarkan laju *crossover* (Cr):

$$u_{j,i}^{G+1} = \begin{cases} v_{j,i}^{G+1}; & \text{jika } \text{rand}() \leq Cr \text{ atau } j = j_{rand} \\ x_{j,i}^G; & \text{jika } \text{rand}() > Cr \text{ atau } j \neq j_{rand} \end{cases} \quad (5)$$

- **Seleksi**; solusi optimal dilakukan dengan membandingkan vektor trial dan vektor target berdasarkan aturan:

$$\mathbf{x}_i^{G+1} = \begin{cases} \mathbf{u}_i^{G+1}; & \text{jika } f(\mathbf{u}_i^{G+1}) \leq f(\mathbf{x}_i^G) \\ \mathbf{x}_i^G; & \text{sebaliknya} \end{cases} \quad (6)$$

Pada masalah pencarian akar polinomial, fungsi objektif dasar umumnya berupa minimalisasi nilai absolut polinomial, yaitu $f(x) = |P(x)|$. Nilai minimum global dan lokal dari fungsi ini tersebar di beberapa titik yang bernilai nol ($f(x) = 0$). DE standar cenderung mengalami konvergensi prematur, di mana seluruh populasi memusat pada satu akar tunggal yang memiliki area daya tarik (*basin of attraction*) paling kuat.

Untuk mempertahankan multi-modalitas algoritma, diterapkan teknik *Niching* berbasis fungsi penalti jarak (*distance-based penalty*) (Jiang, Zhan, Tan, & Zhang, 2021). Pendekatan ini memodifikasi fungsi kesesuaian asli individu menjadi fungsi kesesuaian teraugmentasi ($f_{niching}$). Jika suatu individu berada dalam radius kemiripan (r) dengan kandidat akar yang dieksplorasi oleh individu lain, individu tersebut akan dikenakan penalti numerik yang besar ($\mathcal{P}$):

$$f_{niching}(x_i) = |P(x_i)| + \sum_{j \neq i} \text{Penalti}(x_i, x_j) \quad (7)$$

$$\text{Penalti}(x_i, x_j) = \begin{cases} \mathcal{P} & \text{jika } |x_i - x_j| < r \\ 0 & \text{sebaliknya} \end{cases} \quad (8)$$

Mekanisme repulsi ini memaksa populasi untuk pecah menjadi beberapa sub-populasi (*niches*) yang mengisolasi diri di sekitar area akar yang berbeda, sehingga mencegah tumpang tindih pencarian.

2.3. Metode *Newton Polishing*

Meskipun algoritma metaheuristik seperti DE sangat tangguh dalam meloloskan diri dari jebakan minimum lokal dan mampu mengisolasi daerah sekitar seluruh akar polinomial, algoritma jenis ini memiliki laju konvergensi yang lambat di akhir iterasi (*fine-tuning*). Untuk mencapai akurasi tinggi hingga 10 angka di belakang koma secara efisien, estimasi awal dari DE disempurnakan menggunakan metode *Newton Polishing*.

Newton Polishing memanfaatkan algoritma berbasis gradien Newton-Raphson yang diaktifkan secara lokal pada tahap pasca-proses komputasi evolusi. Formula iterasi lokal dinyatakan sebagai:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{P(x_k)}{P'(x_k)} \quad (9)$$

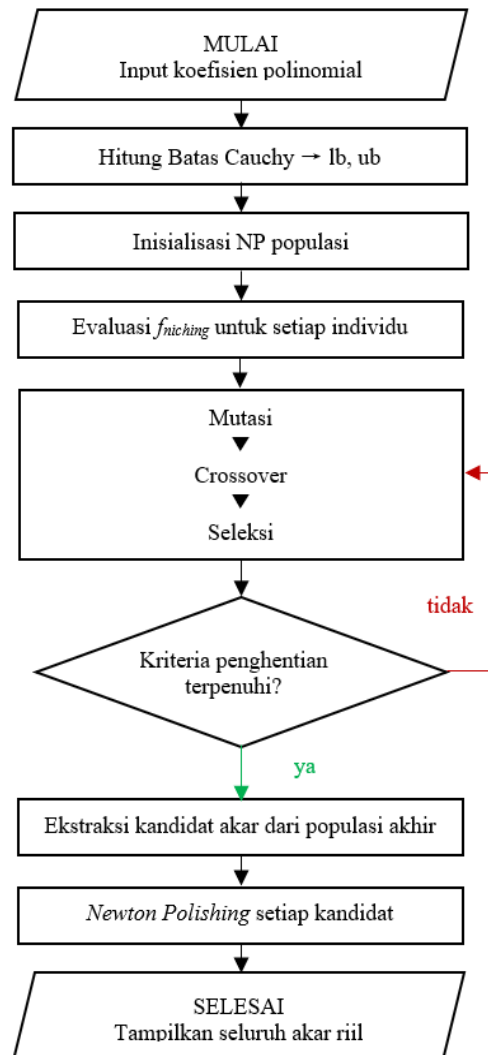
dengan $P'(x_k)$ adalah turunan pertama dari polinomial yang dievaluasi secara eksak menggunakan operasi penurunan koefisien (Liu dkk, 2020). Karena posisi awal x_0 yang dihasilkan oleh fase *DE-Niching* sudah sangat dekat dengan akar sejati, proses *Newton Polishing* dijamin memenuhi kriteria konvergensi kuadratik. Hal ini memungkinkan pencapaian akurasi presisi tinggi dengan jumlah iterasi lokal yang minimal.

Pada masalah pencarian akar polinomial, fungsi objektif dasar umumnya berupa minimalisasi nilai absolut polinomial, yaitu $f(x) = |P(x)|$. Nilai minimum global dan lokal dari fungsi ini tersebar di beberapa titik yang bernilai nol ($f(x) = 0$). DE standar cenderung mengalami konvergensi prematur, di mana seluruh populasi memusat pada satu akar tunggal yang memiliki area daya tarik (*basin of attraction*) paling kuat.

Secara sistematis, alur perhitungan terdiri dari empat tahap utama: (1) penentuan ruang pencarian otomatis, (2) inialisasi populasi dengan teknik *niching*, (3) evolusi (mutasi-*crossover*-seleksi), serta (4) tahap *polishing* menggunakan metode Newton-Raphson seperti pada Gambar 1. Parameter-parameter yang digunakan dalam implementasi diberikan pada Tabel 2.

Tabel 2. Parameter Algoritma

Parameter	Simbol	Nilai		
		P1	P2	P3
Ukuran populasi	NP	$50 \times n$	$50 \times n$	$50 \times n$
Faktor Mutasi	F	0,5	0,5	0,5
Laju <i>Crossover</i>	Cr	0,9	0,9	0,9
Radius <i>niching</i>	r	0,5	0,5	0,08
Nilai penalti	$\mathcal{P}$	10^7	10^6	10^5
Maksimum generasi	$MaxGen$	1500	1000	800
Toleransi Newton	ε	10^{-12}	10^{-12}	10^{-12}



Gambar 1. Diagram Alir Pencarian Akar Polinomial

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini, hasil implementasi algoritma yang diusulkan, yaitu integrasi Differential Evolution (DE), teknik *Niching*, Batas Cauchy, dan *Newton Polishing* untuk menentukan akar-akar riil polinomial derajat tinggi akan diberikan. Pengujian dilakukan terhadap tiga polinomial uji (P1, P2, dan P3) seperti yang telah diberikan pada Tabel 1. Parameter algoritma yang digunakan mengacu pada Tabel 2. Semua simulasi dilakukan dengan program Python 3 pada Laptop (perangkat keras) dengan spesifikasi prosesor Intel Core i3 dan RAM 8 GB.

3.1 Penentuan Batas Ruang Pencarian dengan Batas Cauchy

Langkah pertama sebelum pencarian akar dengan DE adalah menentukan batas ruang pencarian menggunakan Teorema Batas Cauchy berdasarkan Persamaan (2)-(3). Hasil perhitungan Batas Cauchy untuk ketiga polinomial disajikan pada Tabel 3.

Tabel 3. Batas Cauchy tiap Polinomial

Polinomial	B_c	Ruang Pencarian	
		lb	ub
P1	781	-781	781
P2	101,8	-101,8	101,8
P3	19,48	-19,48	19,48

Dari Tabel 3 terlihat bahwa Batas Cauchy mampu menentukan interval pencarian secara otomatis tanpa memerlukan proses *trial-error*. Untuk polinomial P1 dengan koefisien yang cukup besar ($a_4 = -156$), mempunyai Batas Cauchy $B_c = 781$, sehingga domain pencarian menjadi $[-781, 781]$. Sementara itu, polinomial P3 dengan koefisien yang kecil dan saling berdekatan memiliki domain pencarian yang lebih sempit $[-19,48 ; 19,48]$. Hal ini menunjukkan bahwa Batas Cauchy adaptif terhadap skala koefisien polinomial, sehingga dapat mencegah ruang pencarian yang terlalu luas atau terlalu sempit.

3.2 Kemampuan *Niching* dalam Diversitas Populasi

Sebelum menerapkan teknik *Niching*, dilakukan uji coba menggunakan DE standar tanpa modifikasi fungsi objektif. Hasilnya menunjukkan bahwa seluruh individu dalam populasi berkumpul pada satu akar dominan, yaitu akar dengan nilai mutlak polinomial terkecil. Fenomena konvergensi prematur ini terjadi karena semua individu secara alami tertarik ke global optimum.

Setelah teknik *Niching* diaktifkan dengan radius $r = 0,5$ dan $0,08$ dan nilai penalty bervariasi $\mathcal{P} = 10^7, 10^6, 10^5$, populasi terpecah menjadi beberapa kelompok (*niches*) yang tersebar di sekitar lokasi akar yang berbeda. Mekanisme repulsi memaksa individu-individu yang berjarak kurang dari r untuk saling menjauhi, sehingga eksplorasi pencarian akar dapat berlangsung secara simultan. Pada polinomial P3 yang memiliki akar-akar berdekatan, teknik *Niching* terbukti krusial karena radius *niching* yang kecil ($r = 0,08$) mampu membedakan akar-akar yang sangat berdekatan tanpa menggabungkannya ke dalam satu *niche* yang sama.

3.3 Hasil Penerapan *DE-Niching-Newton*

Tabel 4 menyajikan hasil akar-akar yang diperoleh dari penerapan metode *DE-Niching-Newton Polishing*. Pada polinomial P3, meskipun akar-akar 2,1 dan 2,2 sangat berdekatan (jarak hanya 0,1), algoritma berhasil membedakan keduanya. Hal ini membuktikan bahwa kombinasi *DE-Niching-Newton Polishing* sangat efektif dalam akar dengan presisi tinggi, bahkan pada kasus akar yang saling berdekatan sekalipun. Metode yang diusulkan berhasil menemukan seluruh akar riil dari ketiga polinomial uji dengan waktu komputasi relatif singkat berkisar antara 2 hingga 4,5. Menariknya, polinomial P3 membutuhkan waktu sedikit lebih cepat (2,29 detik) dibandingkan P1 dan P2 karena mekanisme *niching* bekerja pada rentang pencarian yang lebih pendek. Untuk polinomial P1, mekanisme *niching* harus bekerja lebih intensif untuk mencakup ruang pencarian yang lebih lebar karena akar-akar berbeda cukup jauh ($\{-2, -2, 1, 2\}$ dengan 156).

Hasil yang diperoleh mengonfirmasi bahwa integrasi Batas Cauchy, teknik *Niching*, dan *Newton Polishing* mampu mengatasi tiga kelemahan utama metode pencarian akar konvensional:

- ✓ **Otomatisasi ruang pencarian:** Batas Cauchy berhasil menggantikan proses *trial-error* dalam penentuan domain (Rahman & Schmeisser, 2002). Hal ini sejalan dengan pernyataan Cauchy (1829) bahwa seluruh akar polinomial terletak dalam lingkaran dengan jari-jari B_c pada bidang kompleks (Cauchy, 1829).

Tabel 4. Hasil Run Program

Polinomial	Akar ke-	Akar-akar Rill	Hasil <i>DE-Niching-Newton</i>	Waktu Komputasi (detik)
P1	1	-2	-2	4,6630
	2	-1	-1	
	3	1	1	
	4	2	2	
	5	156	156	
P2	1	-3,2009	-3,2009	2,9177
	2	-2,4991	-2,4991	
	3	1,1997	1,1997	
	4	2,5012	2,5012	
	5	4,1992	4,1992	
P3	1	-2	-2	2,2933
	2	-1	-1	
	3	2	2	
	4	2,1	2,1	
	5	2,2	2,2	

- ✓ **Penemuan seluruh akar secara simultan, termasuk akar berdekatan:** Teknik *Niching* dengan fungsi penalti jarak efektif mencegah konvergensi prematur. Pada polinomial P3, di mana akar 2,1 dan 2,2 hanya terpisah 0,1, radius *niching* $r = 0,08$ berperan krusial. Dengan pengaturan r yang tepat, kedua akar ini tetap berada dalam *niche* terpisah sehingga keduanya dapat ditemukan. Jika r terlalu besar (misalnya 0,2), kedua akar akan dianggap sebagai satu *niche* dan hanya satu akar yang akan terekplorasi. Hasil ini konsisten dengan temuan Luo dkk. (2022) bahwa mekanisme repulsi dalam algoritma evolusi dapat mempertahankan multimodalitas pada fungsi objektif yang memiliki banyak minimum global, termasuk pada kasus titik optimal berdekatan (Luo, Qiao, Lin, Xu, & Preuss, 2022).
- ✓ **Presisi tinggi:** *Newton Polishing* yang diterapkan pada estimasi awal yang sudah baik menghasilkan konvergensi kuadratik, sebagaimana sifat teoritis metode Newton-Raphson (Liu, et al., 2020). Tanpa tahap ini, *DE-Niching* hanya mampu mencapai akurasi sekitar 10^{-4} karena laju konvergensi yang lambat di akhir iterasi.

Pendekatan yang diusulkan memiliki keunggulan utama dibandingkan dengan algoritma pencarian akar standar seperti metode Newton-Raphson konvensional, yaitu metode ini tidak memerlukan tebakan awal dan mampu menemukan seluruh akar secara otomatis, termasuk akar-akar yang berdekatan, tanpa modifikasi berulang. Metode standar, seperti Newton-Raphson, sering gagal jika tebakan awal tidak berada di dekat akar yang dituju. Pada polinomial dengan akar berdekatan (P3), metode Newton-Raphson dengan tebakan awal di antara dua akar (misalnya 2,25) seringkali mengalami osilasi atau divergensi karena turunan polinomial yang bernilai kecil di daerah tersebut. Sebaliknya, pendekatan *DE-Niching* tidak mengalami masalah ini karena eksplorasi global yang dilakukan sebelum *polishing* lokal.

4. KESIMPULAN

Integrasi Batas Cauchy, teknik *Niching* ($r = 0,5$ dan $0,08$), dan *Newton Polishing* (toleransi $\varepsilon = 10^{-12}$) ke dalam algoritma *Differential Evolution* (DE) berhasil menentukan seluruh akar riil polinomial derajat 5 secara akurat dan efisien. Batas Cauchy dapat menentukan ruang pencarian otomatis tanpa *trial-error*. Teknik *Niching* menjaga diversitas populasi sehingga seluruh akar ditemukan secara serentak (simultan), termasuk akar berdekatan (jarak $0,1$) pada polinomial P3. *Newton Polishing* meningkatkan akurasi hasil dengan waktu komputasi rata-rata kurang dari 5 detik tiap polinomial. Metode ini lebih efektif dibandingkan metode standar karena tidak memerlukan tebakan awal maupun penyesuaian parameter manual.

REFERENCES

- Aziz, N. Z., Salsabillah, L., & Mahmudah, U. (2026). Analisis Efisiensi dan Konvergensi Penyelesaian Metode Newton-Raphson dan Titik Tetap dalam Persamaan Nonlinear Menggunakan Matlab. *MATHunesa: Jurnal Ilmiah Matematika*, 527-534. <https://doi.org/10.26740/mathunesa.v14n1.p527-534>
- Burden, R. L., Faires, J. D., & Burden, A. M. (2015). *Numerical analysis (10th ed.)*. United States: Cengage Learning. <https://doi.org/10.13140/2.1.4830.2406>
- Cauchy, A. L. (1829). Sur la résolution des équations numériques et sur la théorie de l'élimination. *Oeuvres*, 87-161.
- Febrianti, W., Sidarto, K. A., & Sumarti, N. (2021). Solving some ordinary differential equations numerically using differential evolution algorithm with a simple adaptive mutation scheme. *International Conference on Mathematics, Computational Sciences and Statistics 2020* (p. 040003). Surabaya: AIP Publishing LLC. <https://doi.org/10.1063/5.0042351>
- Febrianti, W., Sidarto, K. A., & Sumarti, N. (2022). An Approximate Optimization Method for Solving Stiff Ordinary Differential Equations With Combinational Mutation Strategy of Differential Evolution Algorithm. *Mendel*, 54-61. <https://doi.org/10.13164/mendel.2022.2.054>
- Jiang, Y., Zhan, Z. H., Tan, K. C., & Zhang, J. (2021). Optimizing niche center for multimodal optimization problems. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2544-2557.
- Liu, Z., Zhang, X., Su, M., Sun, Y., Han, H., & Wang, P. (2020). Convergence analysis of Newton-Raphson method in feasible power-flow for DC network. *IEEE Transactions on Power Systems*, 4125-4128. <https://doi.org/10.1109/TCYB.2021.3125362>
- Luo, W., Qiao, Y., Lin, X., Xu, P., & Preuss, M. (2022). Hybridizing niching, particle swarm optimization, and evolution strategy for multimodal optimization. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 6707-6720. <https://doi.org/10.1109/TCYB.2020.3032995>
- McNamee, J. M., & Pan, V. Y. (2013). *Numerical Methods for Roots of Polynomials, Part II*. Netherlands: Elsevier Science.
- Nurman, T. A., Mariani, A., & Nurhidayat, R. (2024). Perbandingan metode Muller dan metode Newton-Raphson dengan dekomposisi Adomian yang dimodifikasi dalam menyelesaikan persamaan polinomial. *Journal of Mathematics: Theory and Applications (JOMTA)*, 42-54. <https://doi.org/10.31605/jomta.v6i1.3353>
- Prodanov, E. M. (2022). New bounds on the real polynomial roots. *Comptes Rendus de l'Academie Bulgare des Sciences*, 178-186. <https://doi.org/10.7546/CRABS.2022.02.02>
- Rahman, Q. I., & Schmeisser, G. (2002). *Analytic theory of polynomials (London Mathematical Society Monographs, New Series, Vol. 26)*. England: Oxford University Press.